

Samenvatting Stromingsleer en warmteoverdracht

Hoofdstuk 1: Introductie

Het vak SWO gaat over de snelheid waarmee warmteoverdracht plaatsvindt. Dit is anders dan bij thermodynamica, dat gaat over de hoeveelheid warmte die getransporteerd wordt. De warmtestroom, symbool \dot{Q} , wordt uitgedrukt in Watt (Joule/seconde).

Er zijn 3 warmteoverdrachtsmechanismen:

1. **Conductie**(geleiding): Energietransport van deeltjes met hoge energie naar deeltjes met lage energie. De deeltjes zelf staan stil. Conductie komt zowel bij vaste stoffen, vloeistoffen als bij gassen voor.
2. **Convectie** (stroming): Energietransport van vaste stoffen naar vloeistoffen/gassen die langs de vaste stof stromen. Hierbij wordt onderscheid gemaakt tussen natuurlijke convectie en gedwongen convectie. Het convectieproces bestaat onder andere uit conductie.
3. **Radiatie** (straling): Energietransport door middel van elektromagnetische straling.

Tekenafpraak:

- Warmte die het systeem ingaat is positief
- Arbeid die verricht wordt door het systeem is negatief

Voor de verschillende manieren van warmtegeleiding gelden de volgende formules:

Mechanisme	Formule
Conductie	$\dot{Q}_{\text{cond}} = kA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x}$ (Wet van Fourier)
Convectie	$\dot{Q}_{\text{conv}} = hA_s (T_s - T_\infty)$ (Wet van Newton)
Radiatie	$\dot{Q}_{\text{rad}} = \epsilon \sigma A_s (T_s^4 - T_{\text{surr}}^4)$ (Wet van Stefan-Boltzmann als $\epsilon=1$)

Betekenis symbolen:

Symbool	Eenheid	Naam
\dot{Q}	W	Warmtestroom
k	W/m °C	Warmtegeleidingscoëfficiënt (Thermische conductiviteit)
A	M ²	Oppervlakte
T	K	Temperatuur
x	m	Verplaatsing in x-richting
h	W/m ² °C	Warmteoverdrachtscoëfficiënt
ε	-	Emissiviteit
σ	W/m ² K ⁴	Constante van Stefan-Boltzmann; $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$

Voor het 2-dimensionale geval wordt de wet van Fourier: $\vec{q} = -k\nabla T = -k \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix}$

Hoofdstuk 3: Stationaire (steady) conductie

Het eerste warmteoverdrachtsmechanisme is conductie. Hierbij wordt de warmte geleid van de ene stilstaande stof naar de andere stilstaande stof.

De warmtegeleidingsvergelijking:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Als de waarde van de k constant is, wordt de vergelijking als volgt geschreven:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{\text{gen}}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Hierin is α de thermische diffusiviteit: $\alpha = \frac{\text{Heat conducted}}{\text{Heat stored}} = \frac{k}{\rho c_p}$ [m²/s]

Elektrisch analogon

Om het rekenen met temperatuursverschillen te vereenvoudigen, kan gebruik gemaakt worden van het **elektrisch analogon**. Dit houdt in dat je temperatuursverschillen opvat als elektrische spanningen, warmtestromen als elektrische stromen en thermische weerstanden als elektrische weerstanden. Op deze manier wordt het heel gemakkelijk om bijv. muren te modelleren die opgebouwd zijn uit verschillende materialen, die allemaal een verschillende weerstand tegen warmtegeleiding hebben. Tevens kan hier gebruik gemaakt worden van de rekenregels van elektrische vervangingsweerstand voor serie en parallel staande thermische weerstanden.

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R} \leftrightarrow I = \frac{\Delta V}{R} \quad R_{\text{cond}} = \frac{L}{kA} \quad R_{\text{conv}} = \frac{1}{hA}$$

Enkele thermische weerstanden:

Geometrische vorm:	Weerstand:
Convectie	$R_{\text{conv}} = \frac{1}{hA_s}$
Conductie: Muur	$R_{\text{wall}} = \frac{L}{kA}$
Conductie: Cilinder	$R_{\text{cyl}} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk}$
Conductie: Bol	$R_{\text{sph}} = \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2 k}$
Contactweerstand tussen 2 vaste stoffen (ontstaat doordat er lucht zit tussen 2 vlakken door ruwheid; zelfde principe als convectie)	$R_c = \frac{1}{h_c} = \frac{\Delta T_{\text{interface}}}{\dot{Q}/A}$

Kritische isolatiestraal

Hoewel bij een muur het toevoegen van isolatiemateriaal altijd zorgt voor een afname van de warmtestroom, hoeft dit bij cilinder- en bolvormige geometrieën niet zo te zijn. Het toevoegen van isolatiemateriaal op een buis vermindert weliswaar de conductie, maar het convectie oppervlak wordt weer groter, dus zal de warmtestroom hierdoor weer toenemen. Er is een bepaalde waarde voor de straal R waarop de warmtestroom maximaal is (gevonden door de afgeleide van \dot{Q} gelijk te stellen aan nul). Deze straal noemen we ook wel de **kritische isolatiestraal**. In de praktijk blijkt dit fenomeen alleen een rol te spelen bij hele dunne buizen (straal kleiner dan 1 cm). Deze kritische isolatiestrallen worden als volgt berekend:

$$\text{Cilinder: } r_{\text{cr, cylinder}} = \frac{k}{h} \qquad \text{Bol: } r_{\text{cr, sphere}} = \frac{2k}{h}$$

Koelvinnen

Om het koelend vermogen van een oppervlak te vergroten kan er gebruik gemaakt worden van koelvinnen (Engels: fins). Teveel koelvinnen te kort op elkaar kan juist averechts werken omdat de lucht dan niet goed kan stromen, waardoor de waarde van h lager wordt.

Bij berekeningen aan koelvinnen wordt uitgegaan van de volgende aannames een stationaire toestand, constante waarden voor k en h en geen warmteontwikkeling in de koelvin.

Voor berekeningen aan 1 koelvin kun je gebruik maken van de **fin equation**:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - a^2\theta = 0 \quad \text{met} \quad a^2 = \frac{hp}{kA_c} \quad \text{en} \quad \theta = T - T_\infty$$

De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking is $\theta(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$. De constanten C_1 en C_2 kunnen worden gevonden aan de hand van randvoorwaarden die je uit de vraagstelling van het probleem kunt halen.

Wil je weten wat het effect op de warmteflux is als je een oppervlak van koelvinnen voorziet, dan maak je gebruik van deze twee eigenschappen:

1. **Effectiviteit** (symbool ε): Hoeveel keer is het koelend vermogen van een oppervlak mét vinnen groter dan dat van een oppervlak zónder vinnen?

$$\varepsilon_{\text{fin}} = \frac{\dot{Q}_{\text{fin}}}{\dot{Q}_{\text{no fin}}}$$

2. **Rendement** (efficiency, symbool η): Het rendement van een koelvin heeft te maken met het temperatuursverschil aan het begin en aan het eind van de koelvin. Een ideale koelvin heeft over de hele lengte dezelfde temperatuur. De waarde van η_{fin} kan bepaald worden met behulp van figuur 3-42 en figuur 3-43.

$$\eta_{\text{fin}} = \frac{\dot{Q}_{\text{fin}}}{\dot{Q}_{\text{fin, max}}}$$

De warmteflux van een oppervlak zonder koelvinnen is $\dot{Q}_{no,fin} = hA(T_S - T_\infty)$

De warmteflux van een oppervlak mét koelvinnen is opgebouwd uit een gedeelte van het oppervlak waar geen vin zit: $\dot{Q}_{unfin} = hA_{unfin}(T_S - T_\infty)$

en het gedeelte van het oppervlak van de vinnen: $\dot{Q}_{fin} = \eta_{fin} * \dot{Q}_{fin,max} = \eta_{fin} * hA_{fin}(T_S - T_\infty)$

De totale warmteflux wordt dan: $\dot{Q}_{totaal} = h * (A_{unfin} + \eta_{fin}A_{fin}) * (T_S - T_\infty)$

Stationaire conductie in meerdere dimensies

Bij het doorrekenen van **lange simpele vormen**, zoals hoge muren en lange buizen mag je het probleem als **1-dimensionaal** beschouwen en dan kun je snel de formule voor de warmtestroom bij conductie gebruiken.

Heb je echter te maken met **korte simpele vormen** (zoals de verwarmingsbuizen van vraag 3-165) dan moet je met de zogenaamde **conduction shape factor S** rekenen. De waarde van S kun je bepalen met behulp van tabel 3-7 De formule voor de conductie warmtestroom wordt dan:

$$\dot{Q} = kS(T_1 - T_2).$$

Hoofdstuk 4: Niet-stationaire (transient) conductie

Isotherme objecten (lumped system analysis)

Om berekeningen eenvoudiger te maken kun je overgaan op 'lumped system analysis'. Hierin stel je dat het object dat van temperatuur verandert een uniforme temperatuursverdeling heeft. Hierdoor hangt de temperatuur alleen af van de tijd en hoef je geen rekening meer te houden met conductie. Dit mag alleen als het Biot getal kleiner is dan 0,1.

$$\text{Energiebalans:} \quad \dot{Q}_{conv} dt = dU$$

$$hA(T - T_{\infty}) * dt = mc_p * dT$$

$$\text{Omdat } T_{\infty} \text{ is constant:} \quad hA(T - T_{\infty}) * dt = mc_p * d(T - T_{\infty})$$

$$\frac{1}{T - T_{\infty}} d(T - T_{\infty}) = \frac{hA}{mc_p} dt$$

$$\text{Integreren aan beide kanten levert:} \quad \ln \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{hA}{mc_p} t$$

Niet-isotherme objecten

De basis voor het analyseren van symmetrische niet-isotherme objecten is het beschouwen van 1D problemen (**one-term solution**), zoals de warmtegeleiding door een oneindig lange muur die aan twee kanten in de omgeving met T_{oneindig} staat, een buis enz. Hierbij moet je constanten aflezen uit grafieken (**Heisler Charts**) of je moet ze exact berekenen. Deze one-term solution is gegeven op pagina 230 van het boek in de vorm van de dimensieloze temperatuur θ voor θ_{wall} , θ_{cylinder} en θ_{sphere} :

$$\theta_{\text{wall}} = \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos(\lambda_1 x/L), \quad \tau > 0.2 \quad (4-23)$$

$$\theta_{\text{cyl}} = \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} J_0(\lambda_1 r/r_0), \quad \tau > 0.2 \quad (4-24)$$

$$\theta_{\text{sph}} = \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \frac{\sin(\lambda_1 r/r_0)}{\lambda_1 r/r_0}, \quad \tau > 0.2 \quad (4-25)$$

Hierin zijn A_1 en λ_1 constanten (de eerste oplossingen van de oplossingsreeks van de DV in de aantekeningen) die je op kunt zoeken in tabel 4-2. De waarde van de functie J_0 kan gevonden worden in tabel 4-3. Er geldt tevens dat $J_0(0) = 1$. Verder is r de afstand vanaf het middelpunt van de cilinder/bol tot aan de plek waar je kijkt, r_0 is de totale straal van de cilinder/bol, τ is het Fourier getal, $T(x, t)$ of $T(r, t)$ is de eindtemperatuur op de gevraagde plaats, T_{∞} is de omgevingstemperatuur en T_i is de begintemperatuur.

Vervolgens kun je 2D problemen oplossen met behulp van de **product solution**. Die zegt bijvoorbeeld dat je een korte cilinder kunt beschouwen als een combinatie van een berekening van een oneindig lange cilinder, vermenigvuldigd met het effect van een oneindig lange muur. De product solution voor 2D problemen kan er bijvoorbeeld als volgt uitzien:

$$\theta(x, r, t) = \theta_{\text{cilinder}}(r, t) * \theta_{\text{muur}}(x, t)$$

Bij het toepassen van deze theorie ga je uit van de volgende aannames: Constante warmtegeleidingscoëfficiënt k , constante warmteoverdrachtscoëfficiënt h , uniforme begintemperatuur, geen warmteontwikkeling binnen het lichaam, geen thermische radiatie.

Half-oneïdige lichamen

Indien er sprake is van een dikke muur mag aangenomen worden dat de temperatuur in het midden van de muur niet verandert. Dan kan het temperatuurprofiel berekend worden met een error-functie. Dit wordt in het vak SWO verder niet behandeld.

Biot getal

Het **Biot getal**, symbool Bi , is een dimensieloos getal dat de verhouding weergeeft tussen de conductie- en convectieweerstand:

- Als $Bi \ll 1$: goede geleiding
 - Als $Bi \gg 1$: Slechte geleiding
- $$Bi = \frac{hL_c}{k} \quad \text{met} \quad L_c = \frac{V}{A}$$

Fourier getal

Het **Fourier getal**, symbool Fo , is een getal dat aangeeft hoe goed warmte wordt geleid door een materiaal ten opzichte van de opgeslagen warmte. Als dit getal hoog is wordt de warmte dus snel doorgeleid. Dit getal wordt ook wel gezien als een dimensieloze tijd. Verder wordt het Fourier getal gebruikt om aan te tonen dat de gevonden formules voor de one-term solution en production solution geldig zijn. Deze mag je namelijk alleen gebruiken als het Fourier getal groter is dan 0,2.

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$$

Dimensieloze getallen

Bij berekeningen wordt veel gebruik gemaakt van dimensieloze getallen, omdat dit vaak standaardwaarden zijn die iets zeggen over het systeem. Bovendien kun je met behulp van deze dimensieloze getallen gemakkelijk schalen, dus de berekening van een modelauto gebruiken om het gedrag van een echte auto te kunnen voorspellen, want als je ervoor zorgt dat de dimensieloze getallen van de modelauto overeenkomen met de dimensieloze getallen van de echte auto, dan zijn de resultaten van de experimenten ook hetzelfde.

Enkele standaard dimensieloze getallen:

- Reynolds getal $Re = \frac{DV}{\nu}$ Verhouding tussen impuls en impulstransport
- Biot getal: $Bi = \frac{hL}{k}$ Verhouding conductie-/convectieweerstand (CONDUCTIE)
- Nusselt getal: $Nu = \frac{hL}{k}$ Een indicatie van de effectiviteit van convectie (CONVECTIE)
- Fourier getal: $Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$ Verhouding doorgeleide/opgeslagen warmte
- Prandtl getal: $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ Verhouding impulsoverdracht/warmteoverdracht
- Grashof getal: $Gr = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L_c^3}{\nu^2}$ Verhouding opwaartse krachten/visceuze krachten
- Rayleigh getal: $Ra = Gr * Pr$

Met behulp van het **Buckingham-Pi theorema** kun je berekenen hoeveel dimensieloze getallen je overhoudt: $aantal = n - m$. Hierin is n het aantal variabelen waarmee je begint en m is het aantal eenheden dat in de dimensies van de beginvariabelen voorkomt.

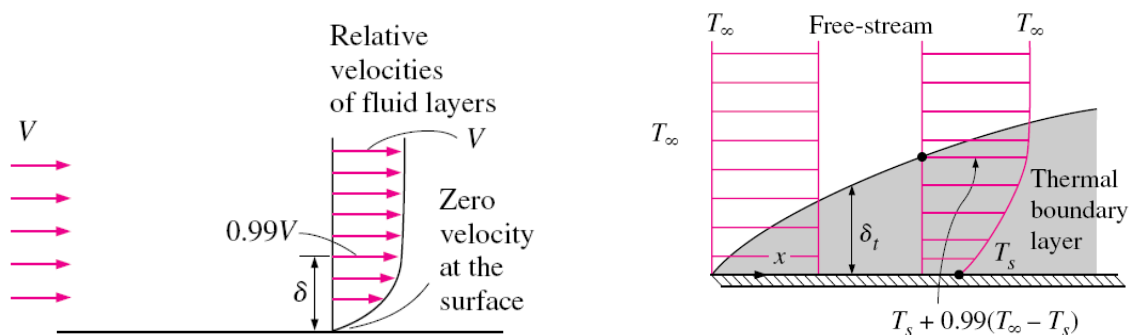
Hoofdstuk 6: Basisprincipes van convectie

De tweede manier om warmte over te dragen is via convectie. Hierbij staat een vaste stof warmte af aan een langsstromende vloeistof. Deze warmteoverdracht vindt plaats via conductie van de vaste stof naar de vloeistof. Het voordeel bij convectie ten opzichte van conductie is dat de opgenomen warmte meteen weer afgevoerd wordt, zodat je constant een hoge temperatuursgradiënt houdt. De mate waarin convectie plaatsvindt hangt grotendeels af van de warmteoverdrachtscoëfficiënt h . De waarde van h hangt NIET af van de desbetreffende stoffen en de temperaturen T_s en T_∞ , maar van de geometrie, stroomsnelheid en de fluid-eigenschappen (thermische conductiviteit, soortelijke warmte, dichtheid, viscositeit).

Bij convectie moet onderscheid gemaakt worden tussen gedwongen convectie en natuurlijke convectie. Gedwongen convectie kan weer onderverdeeld worden in interne stromingen en externe stromingen. Zowel interne als externe stromingen hebben een **intrede-gebied**, dit is het gebied waarin de stroming nog niet **volledig ontwikkeld** is. Bij stromingen door lange buizen of over lange oppervlakken kunnen de berekeningen eenvoudiger gemaakt worden door het intrede-gebied te verwaarlozen. Er bestaat zowel een **hydrodynamisch intrede gebied** (snelheidsprofiel nog niet constant) als een **thermisch intrede gebied** (temperatuurprofiel nog niet constant).

Belangrijke grootheden zijn de **dynamische viscositeit** μ en de **kinematische viscositeit** $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

Externe stromingen kennen een **snelheidsgrenslaag** en een **thermische grenslaag**. Dit is de maximale hoogte waarop de stroming nog meer dan 1% afwijkt van de omstandigheden in situatie "oneindig":



Bij de snelheidsgrenslaag gaan we uit van een hele dunne grenslaag en de **no-slip condition** aan de wand. Dit laatste betekent dat de vloeistof ter hoogte van de wand stilstaat en dat hij dus niet over de wand slipt. Door deze laatste aanname kan de schuifspanning daar berekend worden. Deze schuifspanning is tevens verantwoordelijk voor het ontstaan van de snelheidsgrenslaag omdat hij de stroming afremt: $\tau_{wand} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} = c_f \frac{1}{2} \rho U^2$

Tevens kan de frictie kracht op de wand berekend worden: $F = \tau A = c_f \frac{1}{2} \rho A U^2$

Het verloop van de snelheidsgrenslaag wordt dus bepaald door de snelheidsfunctie $u(y)$.

Het verloop van de thermische grenslaag kan bepaald worden uit de relatie

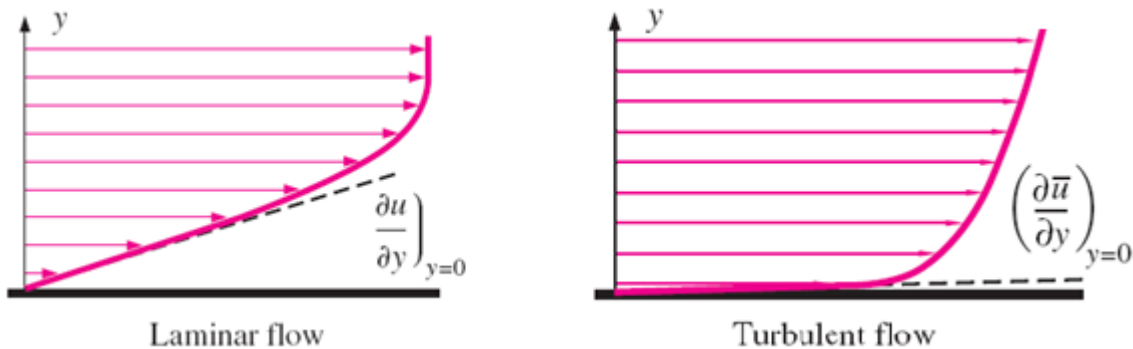
$$\dot{q}_{conv} = \dot{q}_{cond} = -k_{fluid} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad \text{waaruit volgt dat} \quad h = \frac{-k_{fluid} (\partial T / \partial y)_{y=0}}{T_s - T_\infty}$$

Prandtl getal

De dikte van de snelheidsgrenslaag in vergelijking met de thermische grenslaag wordt beschreven door het **Prandtl getal**. Dit getal geeft namelijk aan hoe snel impuls wordt doorgegeven ten opzichte van warmte. Vloeibare metalen hebben een heel laag Prandtl getal ($Pr \ll 1$), en dat betekent dat de aanwezige warmte in vloeibare metalen heel snel verspreid wordt vergeleken met de impuls.

Reynolds getal

De mate van warmteoverdracht via convectie is afhankelijk van het type stroming dat je hebt. Bij een laminaire stroming stroomt de vloeistof netjes in rechte laagjes, terwijl bij turbulente stroming allemaal kleine werveltjes ontstaan die de stroming door elkaar mixen. De overgangssituatie tussen laminair en turbulent heet transitionele stroming. Turbulente stromingen worden gekenmerkt door een hele grote snelheidsgradiënt vlak aan de wand, omdat daar geen wervels kunnen zijn:



Met behulp van het **Reynolds getal** kan bepaald worden of een stroming laminair of turbulent is:

- Externe stromingen: $Re_L = \frac{V^*L}{\nu}$ laminair: $Re < 5 \cdot 10^5$; turbulent: $Re > 3 \cdot 10^6$
- Interne stromingen: $Re = \frac{V_{gem} \cdot D}{\nu}$ laminair: $Re < 2300$; turbulent: $Re > 4000$

Nusselt getal

Naast het Reynolds getal is het **Nusselt getal** een belangrijk dimensieloos getal. Het Nusselt getal kan gezien worden als indicatie van hoeveel keer beter de warmte wordt afgevoerd door het toepassen van convectie. Convectie versleet namelijk de warmteoverdracht omdat opgenomen warmte gelijk weer afgevoerd wordt, waardoor de temperatuursgradiënt hoog blijft. Het Nusselt getal kan ook geschreven worden als $\dot{q}_{conv}/\dot{q}_{cond}$.

Energievergelijking

Om de warmteoverdrachtscoëfficiënt h te kunnen bepalen moet je iets weten over het temperatuursprofiel. Deze hangt af van de snelheid, druk en temperatuur. Deze kun je bepalen met de behoudswetten van de stromingsleer. De druk en snelheid bepaal je de wetten van massabehoud en impulsbehoud. De temperatuur kun je halen uit de wet van energiebehoud (ISL!):

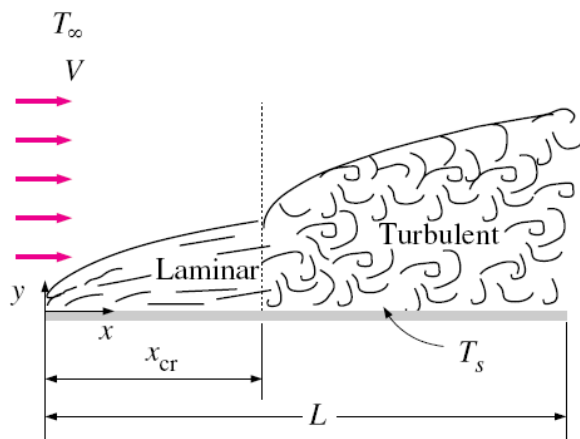
$$\frac{\partial}{\partial t} \rho E + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j E - \sigma_{ij} u_j + q_j) = \rho g_j u_j$$

Met behulp van enkele aannames (stationaire toestand, verwaarloosbare veranderingen in kinetische en potentiële energie, geen viscositeit, constante dichtheid en warmtegeleidingscoëfficiënt) kan deze vergelijking herschreven worden tot de **energievergelijking**:

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Hoofdstuk 7: Externe stromingen & gedwongen convectie

Bij externe stromingen hangen het Reynolds en Nusselt getal af van de plaats op de plaat waarop je kijkt. Daarom kan bij een externe stroming over een plaat het eerste gedeelte laminair zijn, terwijl de stroming later turbulent wordt. Dit komt omdat het Reynolds getal afhangt van de lengte die de stroming al afgelegd heeft. Het omslagpunt ligt bij de kritische afstand x_{cr} . Dit is de plek waar het Reynolds getal gelijk is aan $5 \cdot 10^5$.

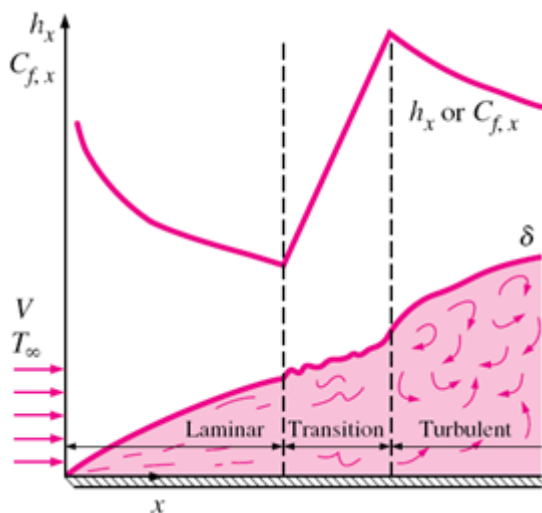


Warmteoverdrachtscoëfficiënt

Omdat het Nusselt getal ook van de afgelegde lengte van de stroming afhangt, hangt de **lokale warmteoverdrachtscoëfficiënt** h_x ook af van de plaats waarop je kijkt. De **gemiddelde warmteoverdrachtscoëfficiënt** h kan worden bepaald door h_x over het hele oppervlak te integreren en dan weer te delen door de lengte van de plaat:

$$h = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx$$

De formule voor h_x is meestal bekend. Hierbij moet wel opgemerkt worden dat de warmteoverdrachtscoëfficiënt een sprong omhoog maakt bij de overgang van laminair naar turbulent:



De warmteoverdrachtscoëfficiënt hangt verder nog af van de situatie waar je naar kijkt. Bij het analyseren van externe stromingen zijn er grofweg 2 situaties: OF een constante wandtemperatuur OF een constante warmtestroom. In het geval van een constante warmtestroom zal de warmteoverdrachtscoëfficiënt h het grootst zijn, namelijk 36% hoger bij laminaire stroming en 4% hoger bij turbulente stroming.

Film temperature

Met behulp van diimensie-analyse kan aangetoond worden dat het Nusselt getal een functie is van het Reynolds getal en het Prandtl getal. Voor elke situatie (vlakke plaat, cilindrische oppervlak, laminair, turbulent, constante wandtemperatuur, constante warmtestroom, enz.) bestaan er formules waarmee je het Nusselt getal kunt berekenen. Hiervoor moet je dus wel in staat zijn om het Reynolds getal en Prandtl getal te berekenen, en daar heb je verschillende eigenschappen voor nodig die afhangen van de temperatuur, zoals de viscositeit, warmtegeleidingscoëfficiënt, dichtheid enz. Meestal worden deze eigenschappen opgezocht bij de **film temperature**, dit is het gemiddelde van de wandtemperatuur en omgevingstemperatuur:

$$T_{film} = \frac{1}{2}(T_{wand} + T_{\infty})$$

Dikte grenslaag

Voor laminaire en turbulente stromingen kan de dikte van de snelheidsgrenslaag $\delta_{v,x}$ en de thermische grenslaag als volgt berekend worden:

$$\text{Laminar: } \delta_{v,x} = \frac{4.91x}{Re_x^{1/2}} \quad \text{and} \quad C_{f,x} = \frac{0.664}{Re_x^{1/2}}, \quad Re_x < 5 \times 10^5$$

$$\text{Turbulent: } \delta_{v,x} = \frac{0.38x}{Re_x^{1/5}} \quad \text{and} \quad C_{f,x} = \frac{0.059}{Re_x^{1/5}}, \quad 5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^7$$

De dikte van de thermische grenslaag δ_t in het laminaire geval wordt als volgt berekend:

$$\delta_t = \delta_{v,x} * Pr^{-1/3}$$

Reynolds-Colburn-Chilton analogie

Bij het analyseren van gedwongen convectie problemen ben je meestal geïnteresseerd in de waarde C_f (om de schuifspanning aan de wand te berekenen) en het Nusselt getal (om de warmtestromen te berekenen). Door de wetten van impulsbehoud en energiebehoud dimensieloos te schrijven in combinatie met enkele aannames is wordt er een verband tussen deze twee variabelen gelegd. Dit verband staat bekend als de **Reynolds-Colburn-Chilton analogie**:

$$\frac{h}{\rho c_p U} Pr^{2/3} = \frac{1}{2} c_f \quad \text{met} \quad St = \frac{h}{\rho c_p U} = \frac{Nu}{Re Pr} \quad (\text{Stanton getal})$$

Hoofdstuk 8: Interne stromingen & gedwongen convectie

Hoewel het principe van een stroming wetenschappelijk goed te beschrijven is, zijn er slechts enkele gevallen waarvoor een theoretische oplossing gevonden is (bijv. een laminaire stroming in een cirkelvormige buis).

Interne stromingen hebben niet overal in de buis dezelfde stroomsnelheid en temperatuur. De gemiddelde snelheid en gemiddelde temperatuur worden gevonden door het snelheids- en temperatuursprofiel te integreren over de hele straal R , met een ringvormig integratie-elementje, en daarna te delen door R .

Net als externe stromingen hebben ook interne stromingen een intredegebied. Ook hier speelt dit gebied alleen een rol bij korte buizen. Voor laminaire stromingen geldt voor het intredegebied van het snelheids- en temperatuursprofiel:

$$L_{h, \text{ laminar}} \approx 0.05 \text{ Re } D$$

$$L_{t, \text{ laminar}} \approx 0.05 \text{ Re } \text{Pr } D = \text{Pr } L_{h, \text{ laminar}}$$

Bij turbulente stromingen zijn beide intredegebieden ongeveer gelijk:

$$L_{h, \text{ turbulent}} \approx L_{t, \text{ turbulent}} \approx 10D$$

Drukval

Stroming door een buis zal altijd een drukverschil kennen tussen het begin en eind van de buis, de zogenaamde drukval, veroorzaakt door visceuze spanningen.

Hierin is f de zogenaamde **Darcy frictiefactor**: $f = \frac{8\tau_w}{\rho V_{avg}^2}$

Er is een verband tussen de frictiefactor en de frictiecoëfficiënt: $f = 4C_f$

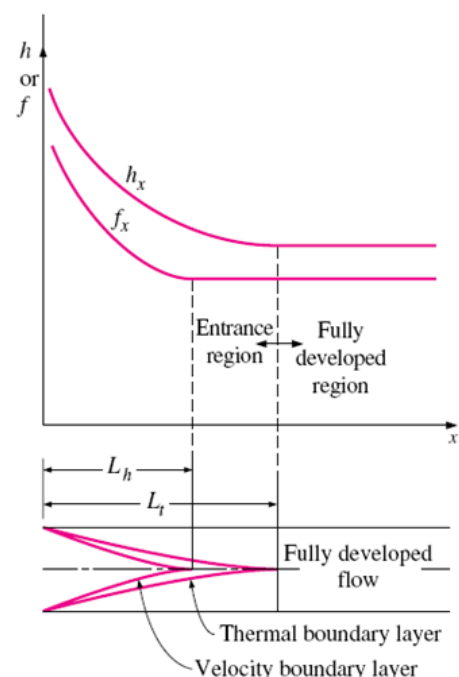
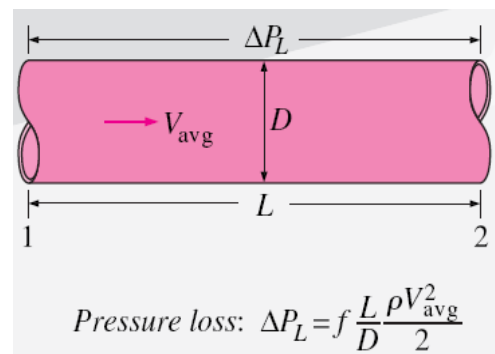
Voor cirkelvormige buizen met laminaire stroming blijkt de frictiefactor gelijk aan $f = \frac{64}{\text{Re}}$.

Bij turbulente stromingen is de frictiefactor af te lezen uit figuur A-20 achterin het boek.

Intredegebied

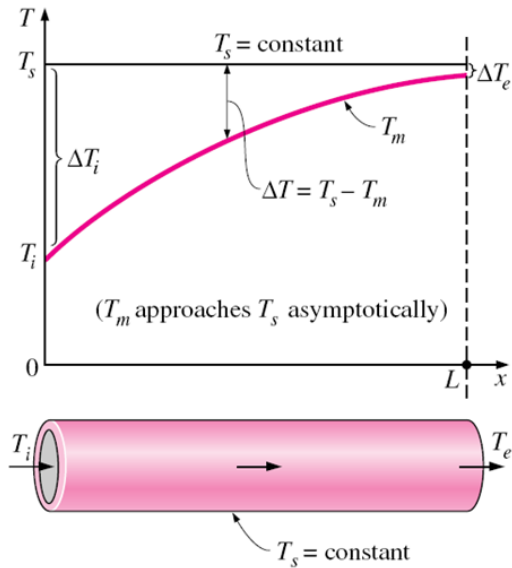
In het intredegebied nemen de warmteoverdrachtscoëfficiënt en de frictiefactor nog af, en vanaf de volledig ontwikkelde situatie zullen ze constant blijven.

Hoewel in het volledig ontwikkelde gebied het temperatuursprofiel NIET verandert, kan de temperatuur zelf WEL veranderen.



Constate wandtemperatuur

Bij interne stromingen zijn er 2 belangrijke situaties, namelijk constante wandtemperatuur en constante heat flux. Bij een situatie met constante wandtemperatuur zal de temperatuursgrafiek van de stroming asymptotisch naar de wandtemperatuur lopen:



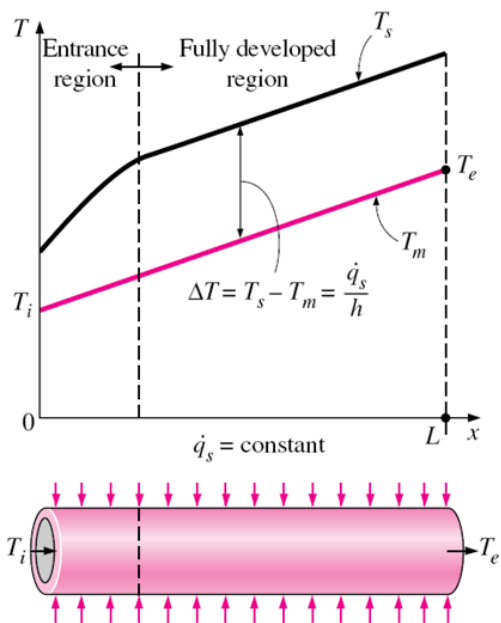
$$T_e = T_s - (T_s - T_i) \exp(-hA_s / \dot{m}C_p)$$

$$\dot{Q} = hA_s \Delta T_{\ln} = \dot{m}c_p(T_e - T_i)$$

$$\Delta T_{\ln} = \frac{T_i - T_e}{\ln[(T_s - T_e)/(T_s - T_i)]} = \frac{\Delta T_e - \Delta T_i}{\ln(\Delta T_e / \Delta T_i)}$$

Constate warmtestroom

Indien de warmtestroom constant is zal de temperatuur lineair oplopen in de tijd:



Gemiddelde temperatuur

Voor het opzoeken van de benodigde materiaal- en stromingseigenschappen heb je een temperatuur nodig. Bij inwendige stromingen maak je dan gebruik van de **bulk temperature**, dit is het gemiddelde van begin- en eindtemperatuur: $T_{bulk} = \frac{1}{2}(T_i + T_e)$. Dit is anders dan de film temperature die je bij externe stromingen gebruikt, want dit is het gemiddelde tussen de wandtemperatuur en de omgevingstemperatuur.

Niet-cirkelvormige doorsneden

Bovenstaande theorie is allemaal afgeleid voor cirkelvormige buizen met diameter D . Om ook pijpen met een andere geometrie door te kunnen rekenen is de **hydraulische diameter** D_h ingevoerd, een soort equivalente diameter voor het geval je met een cirkelvormige doorsnede zou rekenen. Op deze manier kun je net doen alsof een rechthoekige buis ook rond is:

$$D_h = \frac{4A_c}{p} \quad \text{Met dwarsdoorsnede-oppervlak } A_c \text{ en omtrek (perimeter) } p$$

Bepaling warmteoverdrachtscoëfficiënt bij laminaire stromingen

Bij laminaire stromingen wordt de warmteoverdrachtscoëfficiënt bepaald aan de hand van het Nusselt getal. Deze kan worden opgezocht in tabel 8-1 Als de frictiefactor bekend is (deze hangt af van het Reynolds getal).

Bepaling warmteoverdrachtscoëfficiënt bij turbulente stromingen

Omdat er geen bij turbulente stromingen geen mooie theoretische benaderingen zijn hebben verschillende mensen op basis van experimenten geprobeerd om verbanden te leggen tussen het Nusselt getal, Reynolds getal, Prandtl getal en de frictiefactor. De meest gebruikte hiervan zijn:

- Reynolds-Chilton-Colburn analogy

$$Nu = 0.125 f Re Pr^{1/3}$$

- Dittus-Boelter relation

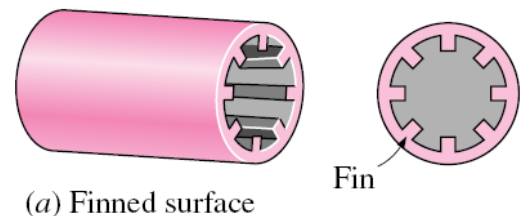
$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n$$

- Een meer preciezer verband

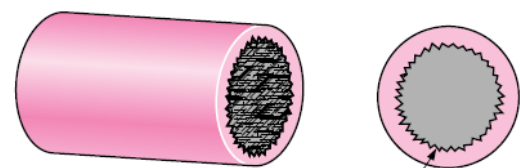
$$Nu = \frac{(f/8)(Re - 1000) Pr}{1 + 12.7(f/8)^{0.5} (Pr^{2/3} - 1)} \quad \left(\begin{array}{l} 0.5 \leq Pr \leq 2000 \\ 3 \times 10^3 < Re < 5 \times 10^6 \end{array} \right)$$

Verbeteren van de warmteoverdracht

De warmteoverdracht bij interne stromingen kan nog verder verbeterd worden door aanpassing van het binnenoppervlak van de buis. Hierdoor vergroot je het oppervlak en de frictiefactor.



(a) Finned surface



(b) Roughened surface

Hoofdstuk 9: Natuurlijke convectie

Naast gedwongen convectie heb je ook nog natuurlijke convectie. Deze ontstaat doordat een koude stroom die opgewarmd wordt door een heet voorwerp een lagere dichtheid krijgt, waardoor de lucht opstijgt. Hierdoor komt er weer koude lucht voor in de plaats, die ook weer opgewarmd wordt, enz.

Opwaartse kracht

Het feit dat lucht met lagere dichtheid opstijgt is te verklaren met de **buoyancy force** (opwaartse kracht). De grootte van deze opwaartse kracht is gelijk aan het gewicht van de verplaatste vloeistof:

$$F_{buoyancy} = \rho_{fluid} g V_{body}$$

De netto kracht in neerwaartse richting wordt dan:

$$F_{netto} = W - F_{buoyancy} = (\rho_{body} - \rho_{fluid}) g V_{body}$$

Dit betekent dat als ρ_{body} groter is dan ρ_{fluid} , dat deze neerwaartse kracht positief wordt en dat het voorwerp zinkt (zoals een steen die je in het water gooit). Is ρ_{body} kleiner dan ρ_{fluid} , dan zal er dus netto een kracht omhoog zijn tot (een deel van) het volume boven water zit.

Volumetrische expansiecoëfficiënt

Omdat in warmteoverdracht vraagstukken de temperatuur de basisvariabele is, en niet de dichtheid, is besloten de dichtheid om te schrijven in de temperatuur. Daarom is de **volumetrische expansiecoëfficiënt** β ingevoerd. Deze variabele geeft weer hoe de dichtheid verandert als functie van de temperatuur bij constante druk:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

Voor een ideaal gas geldt de volgende formule: $P = \rho R T$

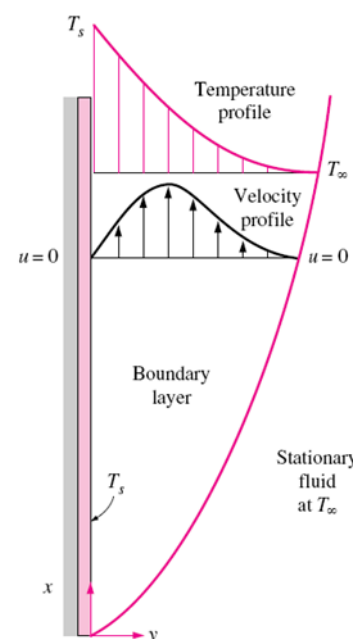
Afleiden naar de temperatuur met constante druk geeft: $\frac{\partial P}{\partial T} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial T} * R T + 0 + \frac{\partial T}{\partial T} * \rho R$

Hieruit volgt: $\beta_{ideal\ gas} = \frac{1}{T}$

Grenslagen bij natuurlijke convectie

Net als bij gedwongen convectie heb je ook bij natuurlijke convectie te maken met een grenslaag. Om hier aan te kunnen rekenen worden een aantal aannames gedaan, waarna de behoudswetten worden toegepast:

- Verticale wand op een vaste temperatuur
- De omgevingstemperatuur verschilt van de wandtemperatuur
- Stroom ontstaat door temperatuurverschillen en gravitatie
- No-slip conditie aan de wand
- Newtoniaanse stroming
- Stationaire toestand
- 2D Probleem
- Snelheid nul aan de wand en aan het eind van de grenslaag



Bepaling warmteoverdrachtscoëfficiënt

Ook bij natuurlijke convectie wordt de warmteoverdrachtscoëfficiënt bepaald aan de hand van het Nusselt getal. Uit dimensieanalyse blijkt dat het Nusselt getal in het geval van natuurlijke convectie een functie is van het **Rayleigh getal** en het Prandtl getal. Het Rayleigh getal is gedefinieerd als het **Grashof getal** vermenigvuldigd met het Prandtl getal.

$$Ra_L = Gr_L * Pr \quad \text{en} \quad Gr_L = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L_c^3}{\nu^2}$$

De rol die het Grashof getal speelt bij natuurlijke convectie kan vergeleken worden met de rol die het Reynolds getal speelt bij gedwongen convectie. Waar het Reynolds getal de verhouding is tussen traagheidskrachten en visceuze krachten, is het Grashof getal de verhouding tussen de opwaartse krachten en de visceuze krachten. Bij natuurlijke convectie bepaalt het Grashof getal tevens of een stroming laminair of turbulent is. Bij verticale platen zal het omslagpunt bij een Grashof getal van ongeveer 10^9 liggen.

Voor simpele gevallen zijn er analytische oplossingen te vinden voor de formules van deze dimensieloze gevallen. In moeilijke gevallen moeten de relaties weer experimenteel bepaald worden. In tabel 9-1 staan voor enkele geometrieën de relaties weergegeven.

Omdat het Nusselt getal bij natuurlijke convectie afhangt van het Grashof getal (en het Prandtl getal), is hier de warmtecoëfficiënt WEL afhankelijk van het temperatuursverschil ΔT . Bij gedwongen convectie hangt het Nusseltgetal af van het Reynolds getal (en het Prandtl getal), en hier zit geen temperatuursfactor in, dus bij gedwongen convectie hangt de warmteoverdrachtscoëfficiënt h NIET af van het temperatuursverschil ΔT .

Gecombineerde natuurlijke en gedwongen convectie

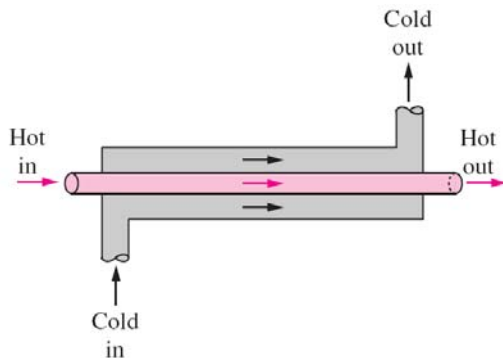
In sommige situaties zal er zowel sprake zijn van natuurlijke convectie als van gedwongen convectie. Meestal is één van beide invloeden wel te verwaarlozen. Als $Gr/Re^2 \ll 1$ mag je natuurlijke convectie verwaarlozen. Als $gr/Re^2 \gg 1$, mag je gedwongen convectie verwaarlozen.

Daarnaast speelt thermische straling bij natuurlijke convectie vaak een rol, terwijl deze bij gedwongen convectie meestal te verwaarlozen is.

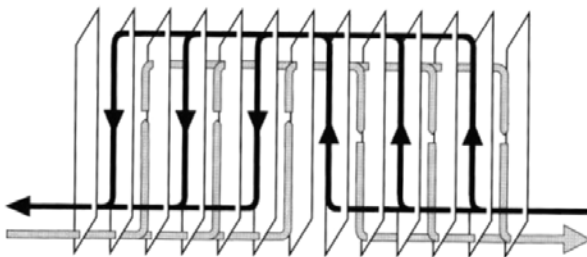
Hoofdstuk 11: Warmtewisselaars

Er zijn grofweg 3 typen warmtewisselaars:

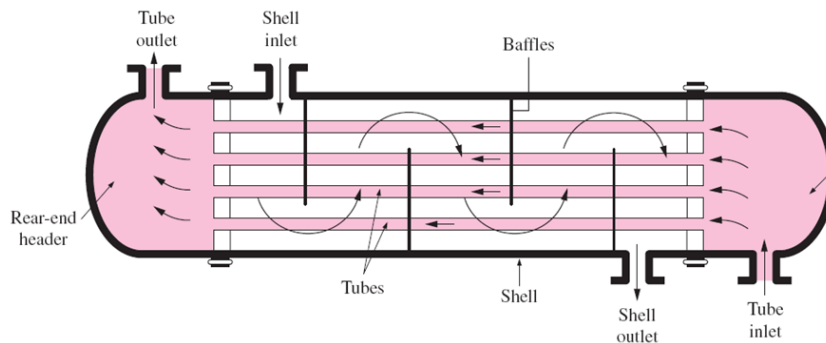
- Double-pipe



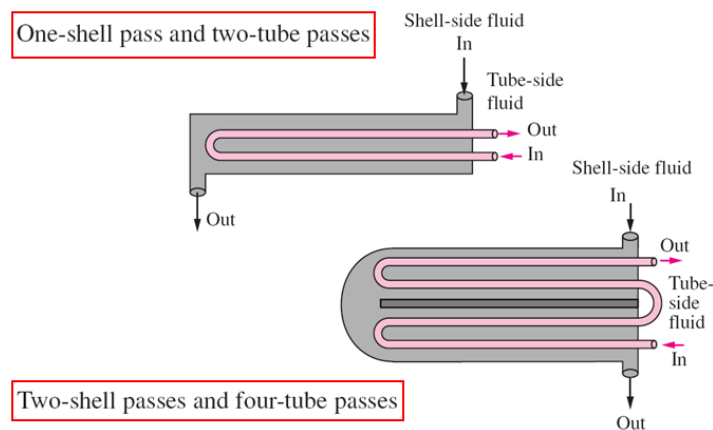
- Plate-and-frame



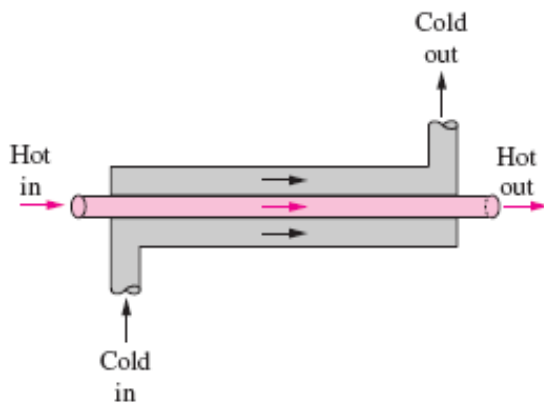
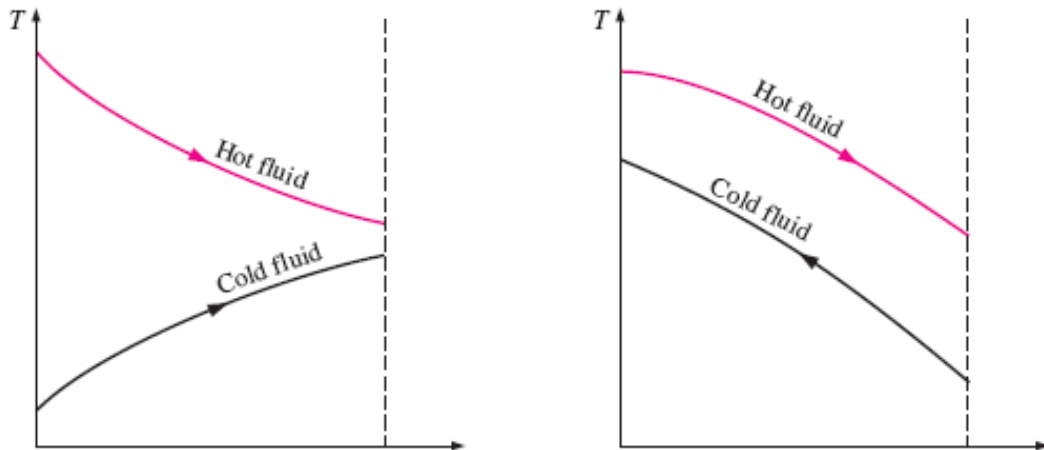
- Shell-and-tube



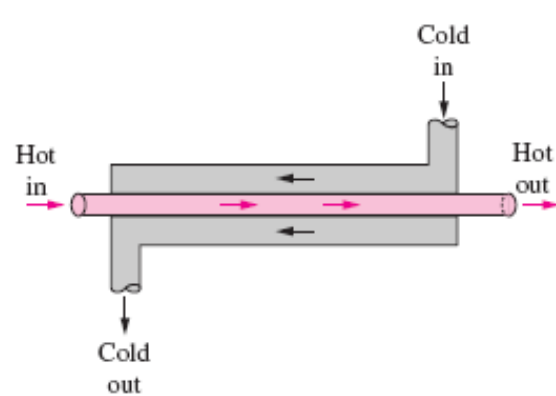
Bij de Shell-and-tube warmtewisselaars zijn het aantal bochten van belang, bijvoorbeeld:



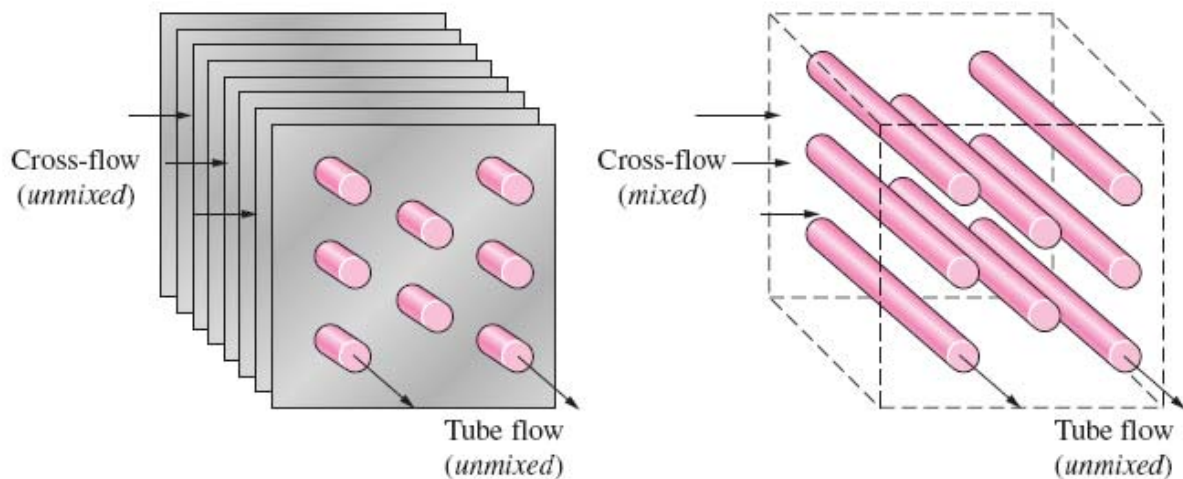
Warmtewisselaars kunnen onder andere worden ingedeeld op basis van de stromingsrichtingen:



(a) Parallel flow



(b) Counter flow



De werking van warmtewisselaars kan verminderen door corrosie, biologische of chemische aanslag enz. Dan is er sprake van een extra thermische weerstand die we een **fouling factor** noemen.

Voor het analyseren van warmtewisselaars worden over het algemeen de volgende aannames gedaan:

- Stationair
- Buitenkant perfect geïsoleerd
- Constante materiaaleigenschappen
- Constante warmteoverdrachtscoëfficiënt
- Geen veranderingen in kinetische en potentiële energie
- Geen geleiding in de wand

Er zijn er twee analysemethoden, namelijk:

- **LMTD Methode:** LMTD = Logarithmic Mean Temperature Difference. Inlaat- en uitlaattemperatuur bekend, geometrie (bijv. lengte) gevraagd.

De algemene aanpak bij deze methode is als volgt:

1. Bepaal de warmtestromen uit de gegeven temperaturen

$$\dot{Q} = \dot{m}_c C_{pc} (T_{c, out} - T_{c, in})$$

$$\dot{Q} = \dot{m}_h C_{ph} (T_{h, in} - T_{h, out})$$

2. Bepaal de LMTD

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1 / \Delta T_2)}$$

3. Bepaal eventueel een correctiefactor aan de hand van grafieken

$$\Delta T_{lm} = F \Delta T_{lm, CF}$$

F hangt af van 2 verhoudingen: $P = \frac{t_2 - t_1}{T_2 - t_1}$ en $R = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1}$ T: shell-kant, t: tube-kant

4. Bepaal de waarde A_s (U is de **overall heat transfer coëfficiënt**)

$$\dot{Q} = UA_s \Delta T_{lm}$$

De waarde voor U kun je als volgt bepalen: $R_{totaal} = \frac{1}{UA} = \frac{1}{h_i A_i} + R_{cond} + \frac{1}{h_o A_o}$

- **Effectiveness-NTU methode:** NTU = Number of Transfer Units. Inlaatcondities en geometrie bekend, uitlaattemperatuur gevraagd. Bij deze methode speelt het dimensieloze NTU-getal, een maat voor de grootte van het oppervlak, een rol: $NTU = \frac{UA}{C_{min}} = \frac{UA}{(\dot{m}C_p)_{min}}$.

De algemene aanpak voor deze methode is als volgt:

1. Bepaal NTU en de **capacity ratio**: $c = \frac{C_{min}}{C_{max}} = \frac{(\dot{m}C_p)_{min}}{(\dot{m}C_p)_{max}}$
2. Bepaal de effectiviteit ϵ uit figuren en/of vergelijkingen
3. Bepaal de maximale warmtestroom \dot{Q}_{max}
4. Bepaal de werkelijke warmtestroom met $\dot{Q} = \epsilon \dot{Q}_{max}$
5. Bepaal de uitlaattemperatuur met $\dot{Q} = \dot{m}C_p \Delta T$

De keuze voor een bepaald type warmtewisselaar hangt onder andere af van de te transporteren warmte, de kosten, pompkracht, grootte, gewicht en materiaalsoort.

Hoofdstuk 12: Basisprincipes van thermische straling

Het derde warmteoverdrachtsmechanisme is thermische straling. Elk voorwerp om je heen straalt warmte uit, hoe koud het ook is. Voorwerpen ontvangen echter ook straling van andere voorwerpen, waardoor er netto een warmtestraling is van hete naar koude voorwerpen.

Uitzenden van thermische straling

Het gemakkelijkste model voor het uitzenden van thermische straling is de zogenaamde black body (zwart lichaam), waarmee je aanneemt dat een voorwerp maximaal uitstraalt én dat hij alle inkomende straling absorbeert. Voor elke temperatuur kun je de maximaal mogelijke thermische straling berekenen: $E_b(T) = \sigma T^4$ [W/m²]

Naast black bodies wordt er ook gebruik gemaakt van **diffuse surfaces** (ruwe oppervlakken), waarin je aanneemt dat de hoeveelheid straling in alle richtingen even groot is, dus onafhankelijk van de richting. Ga je uit van **specular surfaces** (gladde gepolijste oppervlakken), dan stel je dat de invalshoek van straling gelijk is aan de reflectiehoek. Verder bestaan er ook **gray surfaces** waarin je stelt dat de hoeveelheid straling onafhankelijk is van de golflengte. Tenslotte worden veel oppervlakken aangenomen als **opaque surfaces** (niet-doorzichtige oppervlakken), waardoor er geen straling getransmitteerd wordt.

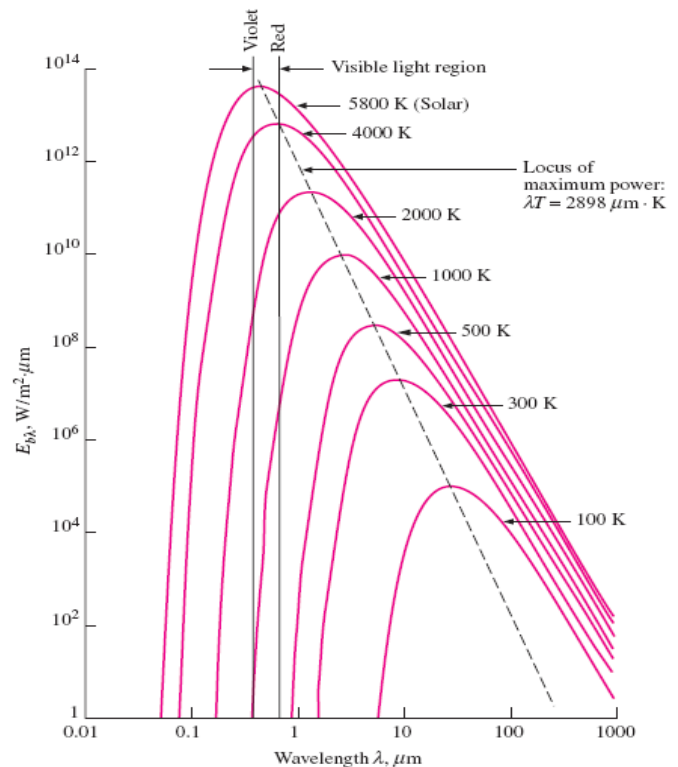
In werkelijkheid zal geen enkel voorwerp een blackbody zijn, maar zal hij slechts een deel van deze warmte uitstralen. Dit wordt aangeduid met de emissiviteit (symbool ε). In

werkelijkheid hangt ε af van de temperatuur, de richting en de golflengte, maar omdat we in dit vak uitgaan van diffuse grijze oppervlakken, hangt ε alleen af van de temperatuur. De formule voor uitgestraalde warmte wordt dan:

$$E = \varepsilon \sigma T^4 \quad \text{met } \varepsilon = \frac{E(T)}{E_b(T)}$$

Deze thermische straling wordt via een aantal golflengten verspreid, variërend van ondergrens λ_1 tot bovengrens λ_2 . Om te berekenen welk deel van de straling uitgezonden wordt door een gedeelte van de golflengtes tussen λ_1 en λ_2 kun je gebruik maken van de **blackbody radiation function** $f_\lambda(T)$. De uitkomst is een getal tussen 0 en 1:

$$f_\lambda(T) = \frac{\int_0^\lambda E_{b\lambda}(\lambda, T) d\lambda}{\sigma T^4}$$



Niet elke golflengte zendt bij elke temperatuur evenveel warmte uit. Om te bepalen welke golflengte het meest uitzendt bij een bepaalde temperatuur gebruik je de **verplaatsingswet van Wien**:

$$(\lambda T)_{\max power} = 2897,8 \mu m \cdot K$$

Hoe warmer het oppervlak, hoe hoger de golflengten waarin de warmte wordt uitgezonden. Vanaf een bepaalde temperatuur wordt zichtbaar licht uitgezonden, zie grafiek.

Om te bepalen hoeveel energie er per seconde door een black body op een temperatuur T wordt uitgezonden op één golflengte gebruik je de **Wet van Planck**, die de **spectral blackbody emissivity power** beschrijft:

$$E_{b\lambda}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)}$$

met $C_1 = 2\pi hc_0^2 = 3.742 \times 10^8 \left(W \cdot \mu m^4 / m^2 \right)$ en $C_2 = hc_0 / k = 1.439 \times 10^4 \left(W \cdot \mu m^4 / m^2 \right)$

Ruimtehoek (Solid Angle)

De ruimtehoek is gedefinieerd als de ruimte die wordt ingesloten tussen een vierkant oppervlakje op de schil van een bol en de oorsprong van die bol. De ruimtehoek gebruik je om de stralingsintensiteit te bepalen en wordt als volgt berekend:

$$d\omega = \frac{dS}{r^2}$$

Hierin is dS een stukje oppervlak op de bol en r is de straal van de bol. Omdat je vaak te maken hebt met kleine oppervlakjes en relatief grote afstanden mag je een oppervlak A in z'n geheel als loodrecht op de bol beschouwen, en hoef je dus geen rekening te houden met de kromming die dit oppervlak zou hebben op de schil van de bol. Dit is handig als je wilt weten hoeveel straling er van oppervlak 1 naar oppervlak 2 gaat. Je mag dan de gemiddelde hoek tussen deze twee oppervlakken pakken om de ruimtehoek te berekenen, met r de afstand tussen de twee oppervlakken:

$$\omega_{2 \rightarrow 1} \cong \frac{A_{n,2}}{r^2} = \frac{A_2 \cos \theta}{r^2}$$

Stralingsintensiteit

De stralingsintensiteit, symbool I, geeft de intensiteit van de straling in een bepaalde richting aan. In het geval van een **diffuus oppervlak** wordt de straling gelijkmatig in een halve bol uitgezonden. De uitgezonden straling is dan over het gehele oppervlak gelijkmatig verdeeld, dus onafhankelijk van de richting waarin je kijkt. In dit geval wordt I als volgt berekend: $I_e = \frac{E}{\pi}$. Hierin staat E voor de uitgezonden straling, dus $E = \varepsilon \sigma T^4$.

De hoeveelheid straling van opp. 1 op opp. 2 kan nu berekend worden: $\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = I_1 (A_1 \cos \theta_1) \omega_{2 \rightarrow 1}$

Ontvangen van thermische straling

Een voorwerp zendt niet alleen thermische straling uit, maar ontvangt ook thermische straling van andere voorwerpen. Deze invallende thermische energie (**Incident radiation of Irradiation**; symbool G) kan worden getransmitteerd (symbool τ), geabsorbeerd (symbool α) of gereflecteerd (symbool ρ). In totaal moet dus gelden:

$$\tau + \alpha + \rho = 1$$

Meestal heb je te maken met niet-doorzichtige (opaque) oppervlakken. Deze kunnen geen warmte transmittieren, dus dan wordt τ gelijk aan nul. Heb je te maken met blackbodies, dan ga je er tevens vanuit dat er geen straling wordt gereflecteerd, dus dan is ρ ook gelijk aan nul.

Indien het oppervlak van een voorwerp in thermisch evenwicht is zal hij volgens de Wet van Kirchhoff evenveel warmte absorberen als uitstralen, dus geldt:

$$\dot{Q}_{abs} = \dot{Q}_{em} \Rightarrow A_s \varepsilon \sigma T^4 = A_s \alpha \sigma T^4 \Rightarrow \alpha = \varepsilon$$

Radiosity

De Radiosity, symbool J , is de totale hoeveelheid stralingsenergie die per seconde door een oppervlak wordt uitgezonden per eenheid van oppervlak. De radiosity is opgebouwd uit de gereflecteerde straling ρG en de straling $E = \varepsilon \sigma T^4$ die hij zelf uitzendt vanwege zijn eigen temperatuur. In formulevorm:

$$J = \varepsilon E_b(T) + \rho G$$

Voor black bodies ($\varepsilon = 1$) geldt dat ze geen invallende straling reflecteren, dus wordt ρ gelijk aan nul:

$$J_b = E_b(T)$$

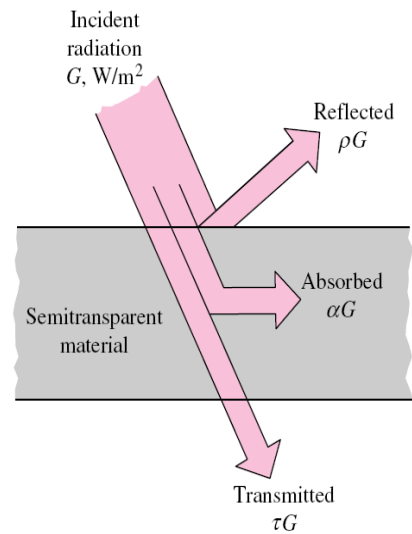


FIGURE 12-31

Hoofdstuk 13: Warmteoverdracht via thermische straling

Zichtfactoren (View factors)

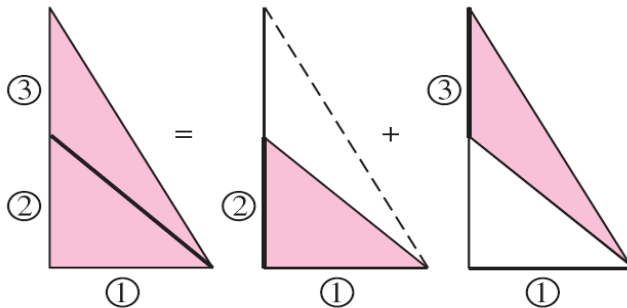
Om te bepalen welk deel van de uitgezonden straling van oppervlak 1 direct op oppervlak 2 valt, maken we gebruik van een zogenaamde **view factor**, een dimensieloze geometrische grootte met een waarde tussen 0 en 1. In dit vak gaan we er vanuit dat alle oppervlakken diffuse oppervlakken zijn, dus dat er in alle richtingen evenveel straling wordt uitgezonden.

Oppervlakken kunnen, als ze concaaf (hol) zijn, ook naar zichzelf straling uitzenden, waardoor de view factor naar zichzelf groter is als nul. In het geval van een recht oppervlak of een convex (bol) oppervlak kunnen ze niet naar zichzelf uitstralen. De view factor is dan gelijk aan nul.

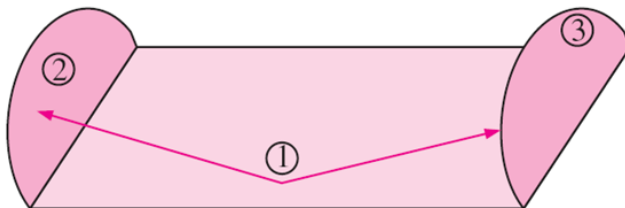
Voor een aantal geometrieën kan de view factor gevonden worden in tabel 13-1 en 13-2.

Voor het bepalen van de view factor zijn er een aantal rekenregels bedacht:

- Sommatieregel: $F_{j1} + F_{j2} + F_{j3} + \dots = \sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$
- Superpositie regel: $F_{3 \rightarrow (1,2)} = F_{31} + F_{32}$ LET OP: $F_{(2,3) \rightarrow 1} \neq F_{21} + F_{31}$

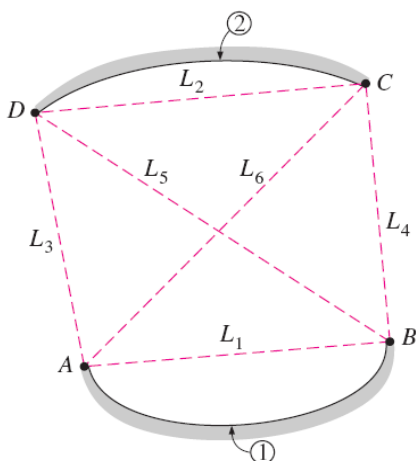


- Symmetrie regel: $F_{12} = F_{13}$



- Reciprociteitsregel: $A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$
- Crossed Strings regel: $F_{12} = \frac{\sum \text{Crossed} - \sum \text{Uncrossed}}{2 * L_1}$

WERKT ALLEEN IN 2D SITUATIES!



Warmteoverdracht tussen blackbodies

Het verband tussen warmteoverdracht tussen black bodies kan relatief simpel worden beschreven omdat ze geen binnenvallende straling absorberen, maar alleen maar zelf straling uitzenden. Als 2 black bodies dezelfde temperatuur hebben zenden ze beide WEL warmte naar elkaar uit, maar ze ontvangen net zoveel warmte terug als dat ze uitzenden, dus vindt er netto GEEN warmteoverdracht plaats. Indien ze beide een verschillende temperatuur hebben wordt de warmtestroom als volgt berekend:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} &= \left(\begin{array}{l} \text{Radiation leaving} \\ \text{the entire surface 1} \\ \text{that strikes surface 2} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{Radiation leaving} \\ \text{the entire surface 2} \\ \text{that strikes surface 1} \end{array} \right) \\ &= A_1 E_{b1} F_{1 \rightarrow 2} - A_2 E_{b2} F_{2 \rightarrow 1} \quad (\text{W})\end{aligned}$$

Toepassen van de reciprociteitsregel: $A_1 F_{1 \rightarrow 2} = A_2 F_{2 \rightarrow 1}$

Levert als eindresultaat: $\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = A_1 F_{1 \rightarrow 2} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$

$$\dot{Q}_i = \sum_{j=1}^N \dot{Q}_{i \rightarrow j} = \sum_{j=1}^N A_i F_{i \rightarrow j} \sigma (T_i^4 - T_j^4)$$

Voor het algemene geval van n black bodies geldt:

Warmteoverdracht tussen diffuse, grijze oppervlakken

Omdat diffuse, grijze oppervlakken wél straling reflecteren wordt de berekening van de warmtestroom veel ingewikkelder. Om het enigszins te vereenvoudigen worden de volgende aannames gedaan:

- De oppervlakken stralen en reflecteren diffuus en grijs
- Oppervlakken hebben een constante temperatuur
- Stationaire toestand
- Niet-doorzichtige oppervlakken ($\tau=0$)
- Kleine temperatuursverschillen zodat de Wet van Kirchhoff gaat gelden: $\alpha(T) = \varepsilon(T)$

Door bovenstaande aannames kan de warmtestroom NAAR opp. i als volgt worden geschreven:

$$\dot{Q}_i = (\text{Uitgezonden straling door opp. i}) - (\text{Invallende straling op opp. i})$$

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= A_i J_i - A_i G_i = A_i (J_i - G_i) = A_i (\varepsilon_i E_{b,i}(T) + \rho_i G_i - G_i) = A_i (\varepsilon_i E_{b,i}(T) + (1 - \varepsilon_i) G_i - G_i) \\ &= A_i (\varepsilon_i E_{b,i}(T) - \varepsilon_i G_i) = A_i \varepsilon_i (E_{b,i}(T) - G_i) \\ &= \frac{A_i \varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} * ((1 - \varepsilon_i) E_{b,i}(T) - (1 - \varepsilon_i) G_i) = \frac{A_i \varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} * (E_{b,i}(T) - \varepsilon_i E_{b,i}(T) - \rho_i G_i) \\ &= \frac{A_i \varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} * (E_{b,i}(T) - J_i)\end{aligned}$$

Door bovenstaande aannames geldt voor de warmtestroom TUSSEN de oppervlakken opp.i en opp.j:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{i \rightarrow j} &= (\text{Uitgezonden straling door i op j}) - (\text{Uitgezonden straling door j op i}) \\ &= A_i J_i F_{ij} - A_j J_j F_{ji} = A_i F_{ij} (J_i - J_j)\end{aligned}$$

Elektrisch analogon

Net zoals bij conductie en convectie kun je ook bij thermische straling gebruik maken van het elektrisch analogon om warmtestromen te berekenen.

Hierboven hebben we de volgende formule afgeleid voor de warmtestroom NAAR oppervlak i:

$$\dot{Q}_i = \frac{A_i \varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} * (E_{b,i}(T) - J_i)$$

Nu definiëren we de eerste term van bovenstaande formule als 1/R:

$$\dot{Q}_i = \frac{E_{b,i}(T) - J_i}{R_i} \quad \text{met } R_i = \frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i}$$

Hiermee ontstaat er weer een elektrisch analogon, waarin \dot{Q}_i de stroom voorstelt, $E_{b,i}(T) - J_i$ het potentiaalverschil en R_i de weerstand. In dit geval noemen we R_i de **oppervlakteweerstand tegen straling**, dus de weerstand die de warmtestroom ondervindt als hij het oppervlak ingaat. Deze weerstand kan ook gezien worden als de moeite die het kost voor het omzetten van het oppervlak van een blackbody naar een grijs diffuus oppervlak. Als je een oppervlak als blackbody beschouwt is de oppervlakteweerstand dus gelijk aan nul.

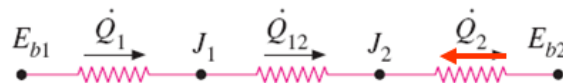
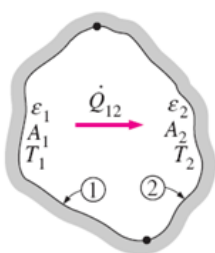
Voor de warmtestroom TUSSEN de oppervlakken i en j kan dezelfde truc uitgehaald worden:

$$\dot{Q}_{i \rightarrow j} = A_i F_{ij} (J_i - J_j) = \frac{J_i - J_j}{R_{i \rightarrow j}} \quad \text{met } R_{i \rightarrow j} = \frac{1}{A_i F_{ij}}$$

Hierin is R de **ruimteweerstand tegen straling**. Dit getal zegt iets over de weerstand die de warmtestroom ondervindt als hij onderweg is van oppervlak i naar oppervlak j. Dit hangt af van de view factor, dus de weerstand ontstaat doordat slechts een deel van de uitgezonden straling door i ook daadwerkelijk op j valt.

Bij het doorrekenen van dit soort problemen ga je eerst uit van oppervlakken als blackbodies. Met behulp van de oppervlakteweerstand zet je de blackbodies om in grijze, diffuse oppervlakken. Vervolgens reken je de weerstand uit die de warmtestroom ondervindt om van het ene naar het andere oppervlak te komen.

Hieronder een voorbeeld:



$$R_1 = \frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} \quad R_{12} = \frac{1}{A_1 F_{12}} \quad R_2 = \frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2}$$

$$\dot{Q}_{12} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2}}$$